RELACIÓN 6: LEYES FUNDAMENTALES Y ECUACIONES CONSTITUTIVAS

* Salvo mención expresa, las expresiones se refieren a ejes cartesianos y las unidades se expresan en el sistema MKS.

PROBLEMA 6.1. El tensor de esfuerzos en un punto P de un medio continuo está dado por:

$$\left(\tau^{ij}\right)=\begin{pmatrix} 7 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Determine el vector tensión en un plano que contiene a P y cuyo vector unitario es $\hat{n}=\frac{2}{3}\hat{i}-\frac{2}{3}\hat{j}+\frac{1}{3}\hat{k}$.

Solución: $\vec{\tau}^{\sigma}=(4,-10/3,0)$.

PROBLEMA 6.2. El estado de tensión de un cuerpo está definido, en unidades convenientes, por: $\vec{\tau}^1=5\hat{k}$, $\vec{\tau}^2=2\hat{j}$ y $\vec{\tau}^3=5\hat{i}-7\hat{k}$. Calcúlese el esfuerzo en la dirección que forma un ángulo de 25º con el eje x, 106º con el eje y, y un ángulo γ, menor que $\pi/2$, con el eje z tal que $\cos\gamma > 0$.

Solución: $\hat{\tau}^{\sigma}=1.615\hat{i}-0.552\hat{j}+2.269\hat{k}$.

PROBLEMA 6.3. Compruebe que si el tensor de esfuerzos es

$$\left(\tau^{ij}\right)=\begin{pmatrix} z^3 & 2z^2 & 2y^2 \\ 2z^2 & x^2z & 2x^2 \\ 2y^2 & 2x^2 & xy^2 \end{pmatrix},$$

la aceleración en cualquier punto del medio continuo es igual a la fuerza másica específica.

Solución: basta comprobar que $\left(\nabla_j\tau^{ij}\right)=(0,0,0)$ y aplicar la ecuación fundamental del movimiento.

PROBLEMA 6.4. Un medio continuo de densidad 820 kg/m^3 está sometido a un estado de esfuerzo definido por el siguiente tensor de esfuerzos expresado en kp/cm^2:

$$\left(\tau^{ij}\right)=\begin{pmatrix} xy^3 & 2xz & -7z^2 \\ 2xz & 3y^2 & 0 \\ -7z^2 & 0 & 12xy \end{pmatrix}.$$

Determine la aceleración en el punto (0,2,-1)cm, suponiendo que la única fuerza másica es la de la gravedad dirigida según el sentido negativo del eje z.

Solución: $\vec{a}=(262900\ ,119500\ ,-9.81)$ m/s^2.

PROBLEMA 6.5. El estado de tensión en un punto de un medio continuo es:

$$\left(\tau^{ij}\right)=\begin{pmatrix} 3\alpha xy & 5\alpha y^2 & 0 \\ 5\alpha y^2 & 0 & 2\beta z \\ 0 & 2\beta z & 0 \end{pmatrix},$$

a) Determine el esfuerzo que actúa sobre la superficie cilíndrica $y^2+z^2=4,$ en el punto $P(2,1,\sqrt{3})$.
b) Calcule la distribución de fuerzas másicas para que el medio continuo se encuentre en equilibrio estático.

Solución: a) $\vec{\tau}^{\sigma}(P)=\left(2.5\alpha,3\beta,\sqrt{3}\beta\right)$. b) $\vec{F}^{c}=-\dfrac{1}{\rho}\left(13\alpha y,2\beta,0\right)$.

PROBLEMA 6.6. Para un estado de tensiones como el dado en el ejercicio 6.8, resuelva:
a) Suponiendo que el medio se comporta como un cuerpo elástico lineal, determine el tensor de deformación, conocido el módulo de Young, *Y*, y el coeficiente de Poisson, σ, del material.
b) Para el caso elástico lineal y suponiendo deformaciones infinitesimales (α, $\beta \ll 1$), determine el coeficiente de dilatación cúbica, así como el nuevo ángulo formado por los ejes *y*-*z* tras aplicar este tensor de esfuerzos.
Solución:

a) $$\left(\varepsilon_{ij}\right)=\frac{1}{Y}\begin{pmatrix} 3\alpha xy & 5\alpha y^2(1+\sigma) & 0 \\ 5\alpha y^2(1+\sigma) & -3\alpha xy\sigma & 2\beta z(1+\sigma) \\ 0 & 2\beta z(1+\sigma) & -3\alpha xy\sigma \end{pmatrix}.$$

b) $$\theta=\frac{(1-2\sigma)3\alpha xy}{Y},\quad \theta_{yz}=\frac{\pi}{2}-\frac{4\beta z(1+\sigma)}{Y}.$$

PROBLEMA 6.7. El estado de tensión en un punto de un medio continuo es:

$$\left(\tau^{ij}\right)=\begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -12 \\ 0 & -12 & 1 \end{pmatrix}(\text{kp/mm}^2).$$

a) Determine la tensión que actúa sobre un plano normal al vector $\hat{n}=\frac{2}{3}\hat{i}+\frac{1}{3}\hat{j}+\frac{2}{3}\hat{k}.$
b) Si el medio es elástico y lineal, siendo sus módulo de Young y de Poisson 100kp/mm^2 y 0.25, respectivamente, calcule la dilatación unitaria del medio en la dirección de $\hat{n}$.
Solución: a) $\vec{\tau}^{\sigma}=(-10/3,-10,-10/3)$. b) l_n=-7.50·10^{-2}.

PROBLEMA 6.8. Una viga de comportamiento elástico lineal, está orientada según el eje *y*, siendo su estado de tensión determinado por el tensor de esfuerzos:

$$\left(\tau^{ij}\right)=\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Determine el tensor de deformación.
b) Suponiendo deformaciones infinitesimales, determine los coeficientes de elongación relativa en cada una de las tres direcciones cartesianas, así como los ángulos que forman dichos ejes tras la deformación. Represente la forma final de la viga.

Solución:

a) $$\left(\varepsilon_{ij}\right)=\frac{1}{Y}\begin{pmatrix} a & 0 & (1+\sigma)b \\ 0 & -\sigma a & 0 \\ (1+\sigma)b & 0 & -\sigma a \end{pmatrix}.$$

b) $l_1 = a/Y$, $l_2 = l_3 = -\sigma a/Y$, $\Delta\theta_{12} = \Delta\theta_{23} = 0$, $\Delta\theta_{13} = -2b(1+\sigma)/Y$.

PROBLEMA 6.9. Un tubo hueco de 10 cm de diámetro interior y 5 mm de espesor está sometido a una tensión longitudinal de 700 kg y un momento de torsión de 2000 kg cm aplicados en sus extremos. Calcúlese: a) el tensor deformación en un punto P a medio espesor del tubo. b) El esfuerzo en ese punto, sobre un plano inclinado 60º con respecto al eje del cilindro (eje z) y 30º respecto al eje acimutal, normal a $\hat{n}=(0,\cos 60^{\circ},\cos 30^{\circ})$. c) Obtenga las componentes normales y cortantes de este esfuerzo.

Solución: a) $\left(\tau_{ij}\right)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 23.1 \\ 0 & 23.1 & 42.5 \end{pmatrix}$ Kg/cm^2, en coordenadas cilíndricas (r,φ,z).

b) $\vec{\tau}^{\,s} = 20.0\,\vec{u}_\varphi + 48.3\,\vec{u}_z$ Kg/cm^2, $\vec{\tau}^{\,sn} = 25.9\,\vec{u}_\varphi + 44.9\,\vec{u}_z$ Kg/cm^2, $\vec{\tau}^{\,st} = -5.92\,\vec{u}_\varphi + 3.42\,\vec{u}_z$ Kg/cm^2.

PROBLEMA 6.10. Dadas las expresiones $Y=\mu\dfrac{3\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}$, $\sigma=\dfrac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$, obtenga los parámetros de Lamé en función del módulo de Young y del coeficiente de Poisson.

Solución: $\lambda=\dfrac{\sigma Y}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}$, $\mu=\dfrac{Y}{2(1+\sigma)}$.

PROBLEMA 6.11. Entre una placa fija y una móvil sobrepuesta hay un espesor de 0.27 mm de lubricante. La placa móvil tiene dimensiones de 7x8 cm^2 y resbala con velocidad de 3 cm/s cuando es empujada con una fuerza de 12 g. Determínese la viscosidad del lubricante (primer coeficiente de viscosidad).

Solución: 0.0193 kg s/m^2.

PROBLEMA 6.12. Un litro de agua pasa de 1 a 10 atmósferas. Suponiendo la temperatura constante de 20ºC, obténgase la disminución del volumen del agua.
Considere la deformación infinitesimal e isotrópica (presión hidrostática) y que el módulo de compresión es de $2.25\cdot 10^4$ kg/cm^2.
Solución: 0.413 cm^3.